ثانوية الجولان التأهيلية

السنة الثانية بكالوريا علوم رياضية

السنة الدراسية : 2010 – 2011

سلسلة التمارين رقم :04

الدوال اللوغاريتمية

التمرين 01

الجزء الأول:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي:

$$f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$$

1 – لتكن φ الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي:
$$\varphi(x)=x+1+\ln x$$

a – أدرس تغيرات الدالة φ

b – بين أن المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β بحيث :
$$0,27\le\beta\le0,28$$

2 – أدرس تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$

الجزء الثاني:

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$

1 – بين أن المعادلة $f(x)=n$ تقبل حلا وحيدا $\alpha_n>0$

2 – a – بين أن : $f(e^n)\le n$ ثم استنتج أن $\alpha_n\ge e^n$

b – بين أن : $\ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right)=\frac{n}{\alpha_n}$

3 – نضع : $\Phi_n=\frac{\alpha_n}{e^n}-1$

a – تحقق أن : $\Phi_n\ge0$ وأكتب $(1+\Phi_n)\ln(1+\Phi_n)$ بدلالة n

b – بين أن : $(\forall t\ge0):\quad 0\le(1+t)\ln(1+t)-t\le\frac{t^2}{2}$

c – بين أن: $\Phi_n\le ne^{-n}\le\Phi_n+\frac{\Phi_n^2}{2}$

d – بين أن : $0\le ne^{-n}-\Phi_n\le\frac{n^2}{2}e^{-2n}$

e – استنتج النهاية : $\lim\left(e^n+n-\alpha_n\right)$

التمرين 02

الجزء I:

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $[1,+\infty[-\{2\}$ بما يلي:

$$g(x)=\frac{(x-1)^2}{x(x-2)}-\ln\left|x^2-2x\right|$$

1 – a – ضع جدولا لتغيرات الدالة g

b – بين أنه : $\left(\exists!\alpha\in]2,+\infty[\right):g(\alpha)=0$

2 – استنتج إشارة $g(x)$ على $[1,+\infty[-\{2\}$

الجزء II :

لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases}f(x)=\frac{\ln\left|x^2-2x\right|}{(x-1)^2} & ,\quad x\neq1\\ f(1)=-1\end{cases}$$

و (C_f) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1 – a – حدد حيز تعريف الدالة f

b – بين أن (C_f) متماثل بالنسبة للمستقيم Δ ذو المعادلة : $x=1$

2 – a – أدرس اتصال الدالة f في النقطة 1

b – بين أن:
$$\left(\forall t\in\left]0,\frac{1}{4}\right[\right):\quad -\frac{t^2}{2}-t^3+t\le\ln(1-t)+1\le-\frac{t^2}{2}$$

c – ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين النقطة 1 ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها

3 – أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

4 – أدرس تغيرات الدالة f

5 – a – تحقق أن : $\alpha(\alpha-2)f(\alpha)=1$

b – حدد تقاطع (C_f) مع محور الأفاصيل

6 – أنشئ (C_f)

التمرين : 03

لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين على المجال $]-1,+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x} \quad \text{و} \quad f(x)=\ln(1+x)-x$$

1 – حدد جدول تغيرات كل من f و g

2 – استنتج إشارة كل من $f(x)$ و $g(x)$ لكل x من $]-1,+\infty[$

3 - (U_n) و (V_n) متتاليتين عدديتين معرفتين كما يلي:

$$U_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$
$$V_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$$

a – بين أن (U_n) تناقصية و أن (V_n) تزايدية

b – أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n-V_n)$

,,

(تحديد نهاية متتالية باستعمال اللوغاريتم)

التمرين :04

لتكن $(V_n)_{n\geq 2}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$(\forall n\geq 2) \quad V_n=\sum_{k=2}^{n}\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)$$

1 – بين أن لكل $x\in[2,+\infty[$ لدينا :

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{2}{x(x+1)}\right)=\log_{\frac{1}{3}}(x-1)-\log_{\frac{1}{3}}(x)+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)-\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$$

2 – بين أن $\lim V_n=1$

3 – نضع : $(\forall n\geq 2) \quad U_n=1-\frac{1}{n^2}$

a – بين أن: $(\forall n\geq 2) \quad U_2\times U_3\times\cdots\times U_n=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)$

b – أحسب بدلالة n التعبير التالي: $\sum_{k=2}^{n}\ln(U_k)$

c – استنتج $\lim\left(\sum_{k=2}^{n}\ln(U_k)\right)$

التمرين رقم:05

I – نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي:

$$g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2+1}$$

1 – أحسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to0^+} g(x)$

2 – a – بين أن

$$g'(x)=\frac{2\left(x^2-1\right)}{x\left(x^2+1\right)^2} \qquad \left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)$$

b – ضع جدولا لتغيرات الدالة g

3 – a – بين أنه يوجد عدد حقيقي $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ بحيث $g(\alpha)=0$

b – استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$

II – لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) & , \quad x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

و $\left(C_f\right)$ منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1 – أحسب النهايتين التاليتين: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to0^+} f(x)$

2 – a – بين أن $f'(x)=g(x)$ $\left(\forall x\in]0,+\infty[\right)$

b – ضع جدولا لتغيرات الدالة f

3 – a – حدد الفروع اللانهائية للمنحنى $\left(C_f\right)$

b – أدرس تقعر المنحنى $\left(C_f\right)$ وحدد نقطة انعطافه

4 – أنشئ المنحنى $\left(C_f\right)$

التمرين رقم 06:

ليكن $a\in]0,+\infty[-\{1\}$

نعتبر الدالة العددية f_a المعرفة كما يلي:

$$f_a(x)=\log_a(x)-\log_x(a)$$

و $\left(C_{f_a}\right)$ منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1 – أ – حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f_a

ب – أحسب نهايات f_a عند محدات D_f حسب قيم العدد الحقيقي a

2 – أ – حدد الدالة المشتقة للدالة f_a

ب – حدد حسب قيم a جدول تغيرات الدالة f_a

3 – ليكن g_a قصور الدالة f_a على المجال $]1,+\infty[$

و h_a قصورها على المجال $]0,1[$

أ – بين أن g_a تقابل من $]1,+\infty[$ نحو مجال يجب تحديده

ب – بين أن:

$$h_a(x)=-g_a\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \left(\forall x\in]0,1[\right)$$

ج – استنتج أن h_a تقابل من $]0,1[$ محو $\mathbb{R}$

4 – حل في D_f المعادلة: $f_a(x)=0$

5 – أنشئ في في نفس المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ المنحنيين $\left(C_{f_2}\right)$ و $\left(C_{f_{\frac{1}{2}}}\right)$

AHMED MOUMNI